MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Calcul torsoriel

6

1 – Préambule

Le torseur est une entité mathématique qui a été élaborer pour satisfaire les mécaniciens dans les études qu'ils ont à mener sur les solides indéformables. Dans ce contexte, le torseur permet notamment de décrire (on dit aussi « modéliser ») le **mouvement** d'un solide et les **actions mécaniques** qu'il subit. Le mécanicien, dans ses travaux, travaille avec des torseurs *statique*, *cinématique*, *cinétique*, *dynamique*.

Quel que soit l'usage qui en est fait, les torseurs répondent tous aux mêmes règles de calcul.

2 – Ecriture - Eléments de réduction

Un torseur $\{T\}$ s'écrit en un point de l'espace, le point O par exemple. Un torseur est déterminé à l'aide de deux vecteurs devant être exprimés dans un même repère $\Re$:

- $\Rightarrow$ Une vecteur résultante, $\vec{R}$, indépendante du point de réduction
- $\Rightarrow$ Un vecteur moment en O du vecteur $\vec{R}$, $\overrightarrow{M_O}$

$$\{T\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_O} \end{Bmatrix}_{\Re}$$

Un torseur peut être écrit avec les composantes des vecteurs :

Posons $\vec{R} = \begin{vmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z_R \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{M_O} = \begin{vmatrix} L_R \\ M_R \\ N_R \end{vmatrix}$

$$\{T\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_R & L_R \\ Y_R & M_R \\ Z_R & N_R \end{Bmatrix}_{\Re}$$

Note 1 : les deux vecteurs $\vec{R}$ et $\overrightarrow{M_O}$ s'appellent les « éléments de réduction » du torseur $\{T\}$.

Note 2 : X_R, Y_R, Z_R, L_R, M_R et N_R s'appellent les coordonnées plückériennes (inventée par Julius Plücker).

3 – torseurs particuliers

- Torseur nul : la résultante et le moment sont nuls : $\vec{R} = \vec{0}$, $\overrightarrow{M_O} = \vec{0}$

$$\{T\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\Re}$$

- Torseur glisseur : le moment est nul en un point : $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{M_O} = \vec{0}$

$$\{T\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} X_R & 0 \\ Y_R & 0 \\ Z_R & 0 \end{Bmatrix}_{\Re}$$

- Torseur couple : la résultante est nulle : $\vec{R} = \vec{0}$, $\overrightarrow{M_O} \neq \vec{0}$

$$\{T\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_O} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & L_O \\ 0 & M_O \\ 0 & N_O \end{Bmatrix}_{\Re}$$

4 – Transport de torseurs

Un torseur peut être transporté d'un point de l'espace à un autre.
La résultante $\vec{R}$ étant indépendante du point de réduction, elle est un invariant (c'est toujours la même, quel que soit le point de réduction)
Le moment, quant à lui, change en général. Il faut donc le calculer.
Soit A et B deux points de l'espace et $\{T\}$ un torseur :

$$\{T\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_A}\end{matrix}\right\}_{\Re} \qquad \{T\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_B}\end{matrix}\right\}_{\Re}$$

On a : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$ ou, ce qui revient au même, $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$
Le symbole $\wedge$ indique un produit vectoriel.
Attention à **l'ordre des termes** car le produit vectoriel est **anticommutatif**.

5 – Somme de torseurs

Attention : *l'addition de torseurs n'est possible que s'ils sont TOUS réduits **au même point** ET dans le même repère. Si tel n'est pas le cas, alors il faut préalablement les transporter au même point et les ramener dans le même repère.*

Soit $\{T_1\}$ un torseur réduit au point C de résultante $\vec{R_1}$ et de moment $\overrightarrow{M_{1C}}$ et $\{T_2\}$ un torseur réduit au point C de résultante $\vec{R_2}$ et de moment $\overrightarrow{M_{2C}}$.
La somme $\{S\} = \{T_1\} + \{T_1\}$ est un torseur dont les éléments de réduction sont une résultante qui vaut $\vec{S} = \vec{T_1} + \vec{T_2}$ et un moment qui vaut $\overrightarrow{M_C}(\vec{S}) = \overrightarrow{M_{1C}} + \overrightarrow{M_{2C}}$.

6 – Comoment de torseurs

Remarque : *les notations utilisées ici sont volontairement celles du mécanicien.*

Soit $\{F\} = {}_C\left\{\begin{matrix}\vec{F}\\ \overrightarrow{M_C}(\vec{F})\end{matrix}\right\}_{\Re}$ et $\{V\} = {}_C\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega(S/R)}\\ \overrightarrow{V(C \in S/R)}\end{matrix}\right\}_{\Re}$ deux torseurs.

Le comoment des deux torseurs est le scalaire (le nombre) P tel que :

$$P = {}_C\left\{\begin{matrix}\vec{F}\\ \overrightarrow{M_C}(\vec{F})\end{matrix}\right\} \otimes {}_C\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega(S/R)}\\ \overrightarrow{V(C \in S/R)}\end{matrix}\right\}_{\Re} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{V(C \in S/R)} + \overrightarrow{M_C}(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}$$

Explication sur les opérateurs :

- $\Rightarrow$ Le symbole $\otimes$ est celui de l'opérateur indiquant le calcul du *comoment* de deux torseurs.
- $\Rightarrow$ Le symbole $\cdot$ est celui du produit scalaire de deux vecteurs.

Le mécanicien averti reconnaitra ici les formules de puissance mécanique : $P = \vec{F} \cdot \vec{V}$ et $P = C \cdot \omega$.